Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2018–2019 уч. год.

Школьный этап.

* 1. класс

1. (7 баллов) В трёхзначном числе первую цифру (разряд сотен) увеличили на 3, вторую на 2, третью на 1. В итоге число увеличилось в 4 раза. Приведите пример такого исходного числа.

Ответ: 107.

Решение. Ответ может быть найден следующим способом. Пусть x искомое число. Тогда условие задачи мгновенно приводит к уравнению x + 321 = 4x, единственным решением которого служит x = 107.

Критерии. Правильный ответ, даже без каких-либо комментариев: 7 баллов.

Неправильный ответ: 0 баллов.

1. (7 баллов) Билет в кино стоил 300 рублей. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50 процентов, а выручка кинотеатра выросла на 35 процентов. Сколько рублей составляет цена одного билета теперь?

Ответ: 270.

Решение. Пусть цена нового билета составляет s рублей. Пусть изначально количество посетителей равнялось N, а после увеличения на 50% стало равняться 1,5N . Тогда по условию нынешняя выручка кинотеатра 1,5N ·s на 35% больше, чем N · 300, откуда имеем 1,5N s = 1,35 · N · 300, и s = 270.

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.

Приведен только верный ответ: 1 балл.

1. (7 баллов) Дана арифметическая прогрессия. Сумма первых её 10 членов равна 60, а сумма первых 20 её членов равна 320. Чему может быть равен 15-й член этой прогрессии?

Ответ: 25.

Решение. Пусть первый член последовательности равен a, а разность рав-на b. Тогда сумма первых 10 её членов равна a + (a + b) + . . . + (a + 9b) = 10a+45b. Сумма первых двадцати членов равна a+(a+b)+. . .+(a+19b) = 20a + 190b. По условию 10a + 45b = 60, 20a + 190b = 320. Решая систему, находим a = −3, b = 2. Тогда 15-й член это a + 14b = 25.

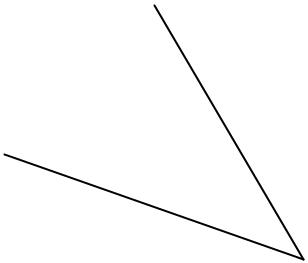
Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.

* целом правильное решение, содержащее арифметические ошибки, не влияющие на ход решения: 5 баллов.

Только ответ: 1 балл.

1. (7 баллов) На плоскости дан квадрат ABCD со стороной 1 и точка X (см. рисунок). Известно, что XA = √5, XC = √7. Чему равно XB?

* A

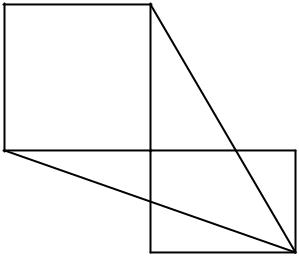


|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | √ |  |  |
|  |  |  | 5 |  |
| C |  |  | B | |  |  |
| √ |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  | |  |  |  |
|  | 7 | |  |  | X |
|  |  |  |  |  |  |

Ответ: 

Решение. Опустим из точки X перпендикуляры XM и XN на прямые CB и AB соответственно. Четырёхугольник BM XN прямоугольник; обозначим длины его сторон BM и N X за a, BN и M X за b.

* A



B M

C b

N a X

По теореме Пифагора для треугольников AN X и CM X выполнены соотношения

AN2 + N X2 = AX2, CM2 + XM2 = CX2 .

Получаем систему (1 + b)2 + a2 = 5, (1 + a)2 + b2 = 7. Вычтя из второго уравнения первое, получим 2(a − b) = 7 − 5, т. е. a = b + 1.

Заменив b + 1 на a в первом уравнении, получим a=√2,5, b=√2,5 -1.

Применим теорему Пифагора для треугольника ВМХ.

ВХ2= a2+ b2 =2,5+2,5-2√2,5+1=6-√10

Ответ 

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.

Вцелом, правильное решение, содержащее арифметические ошибки, не влияющие на ход решения: 5 баллов.

Рассуждения, не приводящие к ответу, или логически ошибочные рассуждения: 0 баллов.

1. (7 баллов) Рассмотрим уравнение sin3(x) + cos3(x) = −1. Сколько у него решений на промежутке [0; 6π]?

Ответ: 6.

Решение. Из основного тригонометрического тождества имеем sin2(x) + cos2(x) = 1. Складывая это с данным в условии равенством, получаем

* + = sin2(x) · (1 + sin(x)) + cos2(x) · (1 + cos(x)) .
* этом выражении все множители неотрицательны, поэтому оба слагаемых sin2(x)(1 + sin(x)) и cos2(x)(1 + cos(x)) равны 0.

Случай 1. Пусть sin(x) = 0. Тогда cos(x) ≠ 0, поэтому cos(x) = −1. Тогда

* = π + 2πk.

Случай 2. Пусть sin(x) ≠ 0. Тогда sin x = −1, откуда следует cos(x) = 0. Тогда х=3π/2+2πn

Легко видеть, что все числа вида π + 2πk и 32π являются корнями исходного уравнения. В нужный промежуток попадают три корня первого вида, у которых k = 0, 1, 2 и три корня второго вида, у которых n = 0, 1, 2. Итого имеем 3 + 3 = 6 корней.

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.

Получены общие формулы для корней, но неправильно посчитано количество корней на отрезке [0; 6π]: 5 баллов.

Только ответ, даже с предъявленным полным множеством корней: 1 балл.

1. (7 баллов) Про тетраэдр ABCD известно, что AB · CD = AC · BD = AD · BC. Пусть IA, IB, IC , ID центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что отрезки AIA, BIB, CIC , DID пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть точка L основание биссектрисы AL треугольника ABC. По свойству биссектрисы, BL/LC = BA/AC. Из соотношения на длины рёбер тетраэдра следует, что BA/AC = BD/DC. Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что BL/LC = BD/DC . По обратному свойству биссектрисы отрезок DL служит биссектрисой в треугольнике

DBC.

Рассмотрим треугольник ALD. Точки ID, IA лежат на его сторонах AL, DL соответственно, так как центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис. Но тогда отрезки DID и AIA пересекаются. Аналогично можно доказать, что любые два отрезка из условия пересекаются. Эти четыре отрезка не лежат в одной плоскости (поскольку их концы A, B, C, D не лежат в одной плоскости) и при этом попарно пересекаются. Такое возможно только когда они все имеют общую точку.

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.

Доказано, что отрезки попарно пересекаются, но не доказано, что все

четыре имеют общую точку: 4 балла.

Доказано, что биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются на ребре BC, но дальнейших продвижений нет: 2 балла.

Неверные или не доведенные до конца рассуждения: 0 баллов.